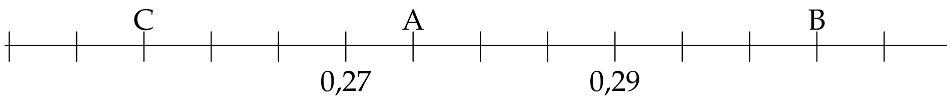
Repetitionsuppgifter i matematik

1. De fyra enkla räknesätten

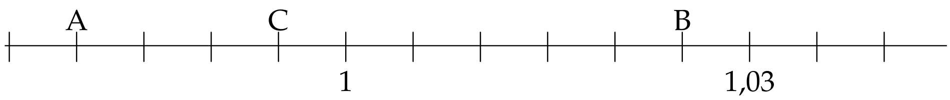
Här övar vi på de fyra räknesätten för hela tal (positiva och negativa), tal i bråkform och tal i decimalform.

1.1 Bestäm de tal på tallinjen, som är markerade med A, B och C:

a)



b)



1.2 Vilket tal ligger mitt emellan a) 0,21 och 0,22 b) 0,296 och 0,3
c) 0,79 och 0,8 d) 0,18 och 0,185 ?

1.3 Beräkna a) $5 \cdot 2 + 6 \cdot 3$ b) $5 \cdot (2 + 6 \cdot 3)$ c) $5 \cdot (2 + 6) \cdot 3$ d) $(5 \cdot 2 + 6) \cdot 3$

1.4 Beräkna a) $-40 - 10$ b) $-20 + 12$ c) $15 + (-20)$ d) $-45 + (-5)$
e) $65 - (-20)$ f) $-30 - (-10)$

1.5 Beräkna a) $-11 - 5 + 8 - 2$ b) $-8 + (-20) - (-12)$
c) $-40 + 15 - 10 + 5$ d) $15 - (-20) + (-100)$

Det är inte tillåtet att skriva två operationssymboler intill varandra. Ett tyvärr vanligt fel är ”gånger minus”, dvs. att man får se något sådant som $2 \cdot -3$. Detta är förbjudet; man *måste* sätta parentes om den andra faktorn: $2 \cdot (-3)$. *Sätt hellre ut för många parenteser än för få!*

1.6 Beräkna a) $(-1) \cdot (-3) \cdot (-4)$ b) $8 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-6)$

c) $(-3)\cdot 7+(-4)\cdot(-5)$ d) $(-2)\cdot(-10)-6\cdot(-3)$

När man arbetar med bråkuttryck är det *mycket viktigt* att bråkstrecket står på samma nivå som tecknet = och symboler som + och − (om dessa inte själva ingår i bråket). Exempelvis är det fel att skriva

$$\frac{a+1}{b}=c$$

när man menar

$$a+\frac{1}{b}=c.$$

En god idé kan vara att *börja med bråkstrecket,* när man ska skriva ett bråk.

1.7 Beräkna a) $\dfrac{-5-7}{1-(-2)}$ b) $\dfrac{2+5\cdot(-10)}{(-2)\cdot(-3)}$

1.8 Beräkna a) $12-10\cdot 0{,}2$ b) $0{,}2\cdot 4+6\cdot 0{,}7$ c) $3{,}5-0{,}5\cdot 3$ d) $20-12\cdot(0{,}8-0{,}3)$

1.9 Beräkna a) $0{,}2\cdot 0{,}3$ b) $0{,}08\cdot 0{,}7$ c) $\dfrac{0{,}72}{0{,}09}$ d) $\dfrac{0{,}15}{0{,}003}$

1.10 Beräkna a) $4\cdot 0{,}2+0{,}1$ b) $0{,}7\cdot 0{,}5-0{,}25$ c) $4{,}2-0{,}2\cdot 5$ d) $0{,}8+0{,}2\cdot 6$

1.11 Beräkna a) $0{,}3+0{,}2\cdot 3$ b) $\dfrac{6}{0{,}3}+\dfrac{6}{0{,}2}$ c) $\dfrac{0{,}4+0{,}5}{0{,}3}$ d) $0{,}7\cdot 0{,}3-0{,}2$

1.12 Beräkna a) $0{,}5\cdot 0{,}6-0{,}4\cdot 0{,}7$ b) $\dfrac{0{,}36+0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}06}$ c) $0{,}7\cdot 0{,}08+0{,}04\cdot 0{,}6$
d) $\dfrac{0{,}4\cdot 0{,}9-0{,}3}{0{,}005}$

1.13 Vilket tal skall talet 12,3 multipliceras med för att resultatet skall bli
a) 1 230 000 b) 0,0123 ?

1.14 Beräkna a) $0{,}38+0{,}2$ b) $0{,}31-0{,}1$ c) $0{,}075-0{,}07$ d) $0{,}8-0{,}025$

1.15 Summan av två tal är 0,6. Det ena talet är 0,04. Vilket är det andra?

1.16 Produkten av två tal är 0,045. Det ena talet är 0,9. Vilket är det andra?

1.17 Vad kostar det att köpa 0,3 kg köttfärs, om köttfärsen kostar 45 kr/kg ?

1.18 För en viss kopieringsmaskin är kostnaden 30 öre per kopia. Hur många kopior har en kund tagit om hon får betala 67,50 kr?

1.19 Förkorta så långt som möjligt a) $\frac{30}{75}$ b) $\frac{63}{35}$ c) $\frac{77}{121}$ d) $\frac{175}{325}$

1.20 Bestäm det tal som skall stå på den tomma platsen:
a) $\dfrac{1}{3}=\dfrac{}{15}$ b) $\dfrac{3}{7}=\dfrac{}{28}$ c) $\dfrac{5}{6}=\dfrac{35}{}$ d) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{75}{}$

1.21 Hur stor del av en timme är a) 10 minuter b) 45 minuter c) 3 minuter ?

1.22 Skriv upp de tal mellan 0 och 1, som i enklaste bråkform skrivs med nämnaren 12.

1.23 Vilket tecken (=, < eller >) skall stå mellan talen?
a) $\frac{4}{8}\quad\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{7}\quad\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}\quad\frac{1}{7}$ d) $\frac{4}{9}\quad\frac{11}{24}$

1.24 Hur stor del av en timme är a) 30 sekunder b) 12 sekunder c) 45 sekunder ?

1.25 Vilket tecken (< eller >) skall stå mellan talen?
a) $\frac{1}{99}\quad\frac{1}{100}$ b) $\frac{13}{25}\quad\frac{15}{31}$ c) $\frac{8}{9}\quad\frac{9}{10}$ d) $\frac{10}{9}\quad\frac{11}{10}$

1.26 Skriv följande tal i enklaste bråkform:
a) 0,005 b) 0,025 c) 0,0175 d) 0,00024

1.27 Beräkna a) $\frac{11}{7}+\frac{3}{7}-1$ b) $\frac{5}{6}-\frac{7}{9}$ c) $\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{2}{45}$ d) $\frac{1}{8}+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}$

1.28 Summan av två tal är $\frac{3}{10}$. Det ena talet är $\frac{1}{6}$. Vilket är det andra?

1.29 Produkten av två tal är 1. Bestäm den andra faktorn om den ena faktorn är
a) $\frac{1}{7}$ b) 6 c) $\frac{3}{5}$

1.30 Vilket tal skall $\frac{5}{6}$ multipliceras med för att produkten skall bli $\frac{3}{8}$?

1.31 Beräkna a) $\frac{1}{25}+\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\left(3-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{25}\right)$ c) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}$ d) $\dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}+\frac{1}{3}}$

1.32 Bestäm det bråk som ligger mitt emellan a) $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{12}$.

1.33 Beräkna medelvärdet av $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$.

1.34 Beräkna a) $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}+\frac{11}{18}$ b) $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{5}{36}+\frac{5}{9}$ c) $1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)$
d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

1.35 Beräkna a) $\frac{12}{35}\cdot\frac{21}{32}$ b) $\frac{14}{15}\Big/\frac{21}{40}$

1.36 Av en tygrulle skall man klippa till 40 cm långa stycken till dukar. Hur många dukar får man om tygrullen är 240 m lång?

1.37 Vad är kilopriset för jäst om 50 g kostar 2,75 kr?

1.38 En person är ordinerad att ta 20 ml medicin 3 gånger per dag. Hur mycket medicin går det åt på 20 dagar? Svara i liter.

1.39 I Sverige kastas i genomsnitt 300 kg sopor per person och år. Hur stor mängd sopor blir det under ett år i ett samhälle med 100 000 invånare? Svara i ton.

1.40 Vid en regnskur föll 12 mm regn. Hur många liter föll på en rektangulär gräsmatta som är 25 m lång och 10 m bred?

1.41 Vad kostar det att duscha 10 minuter under vatten som rinner med 10 liter/minut, om varmvatten kostar 35 kr/m^3 ?

2. Potenser och rötter

I det här avsnittet används följande definitioner och räkneregler. Dessa regler kan man använda utan att förklara sig, men **regler som inte finns i rutan måste man bevisa** om man vill använda dem!

Potensregler: $a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$ $\quad (ab)^x = a^x \cdot b^x$

Rötter: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Kommentarer: Om $a \geqslant 0$, så betyder $\sqrt{a}$ alltid det **icke-negativa** tal vars kvadrat är a. Exempelvis är $\sqrt{9} = 3$. En vanlig missuppfattning är att $\sqrt{9}$ skulle ha två olika värden (± 3), men det är fel! (Däremot gäller att ekvationen $x^2 = 9$ har två rötter, nämligen $\pm\sqrt{9}$ dvs. ± 3.

Observera att det inte finns någon räkneregel för t.ex. förenkling av $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ett exempel på användning av regeln $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$:

$$\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} (= \sqrt{27}).$$

2.1 Beräkna a) $\sqrt{1600} + \sqrt{900}$ b) $\sqrt{0{,}0081}$ c) $\sqrt[3]{0{,}125}$ d) $\sqrt[3]{27000}$

2.2 Förenkla a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ d) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

2.3 Förenkla a) $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ b) $\sqrt{125} - \sqrt{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{80} + \sqrt{5}}{\sqrt{500}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{54}}{\sqrt{3}}$

2.4 Beräkna a) -3^2 b) $(-3)^2$ c) $\sqrt{3^2}$ d) $\sqrt{(-3)^2}$

2.5 Beräkna a) $2^4 - 6$ b) $10 + 5^2$ c) $2 \cdot 3^2$ d) $3^2 - 2^3$

2.6 Beräkna a) $5^3 - 5^2$ b) $3^4 - 4^3$ c) $2^6 + 6^2$ d) $2^3 \cdot 3^2$

2.7 Beräkna a) $5 \cdot 10^3 + 10^2$ b) $10^3 + 7 \cdot 10^2$ c) $3 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4$ d) $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$

2.8 Skriv i potensform med basen 2: a) 8 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{64}$ d) 128

2.9 Beräkna a) $0{,}3^2$ b) $0{,}1^5$ c) $\dfrac{1}{0{,}5^2}$ d) $\dfrac{1}{0{,}2^3}$

2.10 Beräkna a) $(-3)^3$ b) $(-7)^2$ c) $(-2)^6$ d) $(-10)^5$

2.11 Beräkna a) $(-2)^3 + (-3)^2$ b) $10^2 + (-5)^3$ c) $(-2)^5 + (-5)^2$
d) $(-4)^3 + (-3) \cdot (-20)$

2.12 Beräkna a) $0{,}002 \cdot 10^6 + 10^3$ b) $1{,}45 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^2$
c) $0{,}5^2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^4$ d) $0{,}03 \cdot 10^5 - 50^2$

2.13 Beräkna a) $10^4 - 10^2$ b) $10^6 + 10^4 + 10^2$ c) $10^5 + 10^3$ d) $10^7 - 10^3$

2.14 Skriv i potensform med basen 2 det tal som är a) dubbelt så stort som 2^{20},
b) hälften så stort som 2^{20}.

2.15 Skriv som en enda potens av 5: a) $5^7 \cdot 5^{-3}$ b) $\dfrac{5^{-6}}{5^2}$ c) $5^{-2} \cdot 5^{-3}$ d) $\left(5^{-3}\right)^2$

2.16 Beräkna a) $5^{-4} \cdot 5^6$ b) $3^4 \cdot 3^{-5}$ c) $7^{-7} \cdot 7^6 \cdot 7$ d) $\left(2^{-4}\right)^2 \cdot 2^6$

2.17 Skriv som en enda potens av 3: a) $3^{-4} \cdot 3^{-5}$ b) $\dfrac{3^3}{3^9}$ c) $\dfrac{3^2}{3^{-4}}$ d) $\left(3^{-5}\right)^{-3}$

2.18 Beräkna a) $7^{-9} \cdot 7^{-5} \cdot 7^{12}$ b) $\left(3^4\right)^3 \cdot \left(3^2\right)^{-5}$ c) $\left(10^{-4}\right)^{-2} \cdot 10^{-7}$ d) $6^8 \cdot \left(6^3\right)^{-3}$

2.19 Skriv som en potens av 3: a) $\dfrac{3^{-5} \cdot 3^2}{3^7}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 3^{-11}}{\left(3^5\right)^2}$ c) $\left(3^{-4}\right)^2 \cdot 3^{-3}$

d) $\dfrac{3^{-9}}{3^{-3}}$

2.20 Beräkna a) $1 - 7^{-1}$ b) $2^{-2} - 6^{-1}$ c) $4^{-1} + 5^{-1}$ d) $2^{-3} + 3^{-2}$

2.21 Beräkna a) $0{,}2^{-3}$ b) $0{,}3^{-2}$ c) $0{,}3^{-1} + 0{,}6^{-1}$ d) $0{,}2^{-2} + 0{,}5^{-2}$

2.22 Beräkna och svara i grundpotensform (dvs. på formen $a \cdot 10^n$, där $1 \leqslant a < 10$):
a) $3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^5$ b) $4 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^5$ c) $4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^{-6}$ d) $5 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^{-8}$

2.23 Med hur många siffror skrivs följande tal om de skrivs utan potenser?
a) $1{,}75 \cdot 10^8$ b) $8{,}5 \cdot 10^{20}$ c) $350 \cdot 10^{12}$ d) $0{,}03 \cdot 10^8$

2.24 Beräkna och svara i grundpotensform:
a) $\dfrac{6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-2}}$ b) $\dfrac{3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}}$ c) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10^3}$ d) $\dfrac{2 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^{-5}}$

2.25 Beräkna och svara i grundpotensform:
a) $\left(4 \cdot 10^4\right)^2$ b) $\left(5 \cdot 10^{-5}\right)^3$ c) $\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^3$ d) $\left(2 \cdot 10^5\right)^{-1}$

2.26 $a = 8 \cdot 10^8$ och $b = 2 \cdot 10^{-2}$. Beräkna och svara i grundpotensform:
a) ab b) a/b c) b/a

Ett bråk med kvadratrotsuttryck i nämnaren brukar inte anses som "förenklat". Kvadratrötter i nämnare kan avlägsnas genom att man förlänger med s.k. *konjugatuttryck*:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2.$$

2.27 Skriv om följande uttryck utan kvadratrötter i nämnaren:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{6}+1}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

2.28 Förenkla så långt som möjligt följande tal:

a) $\dfrac{1}{1-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$ b) $\dfrac{6}{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$

2.29 I en rätvinklig triangel är den ena kateten $\sqrt{21}$ l.e. och hypotenusan är $3\sqrt{5}$ l.e. Bestäm a) den andra katetens längd, b) triangelns area, c) höjden mot hypotenusan.

2.30 I en liksidig triangel är sidan $\sqrt{48}$ l.e. Bestäm a) höjden, b) arean.

3. Algebra

Här ska vi öva följande räkneregler:

(13) Konjugatregeln: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
(14) Kvadreringsregeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ kan man lösa genom **kvadratkomplettering**: addera $\frac{p^2}{4} - q$ till båda leden så får man

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q.$$

Här är vänsterledet kvadraten på uttrycket $\left(x + \frac{p}{2}\right)$. Då måste gälla att

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Detta ger **lösningsformeln**

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{15}$$

(16) Om andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2 så är $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ och $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 x_2$.

Kommentarer: Om man byter ut b mot $-b$ i kvadreringsregeln får man formeln $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Om man kommer ihåg denna idé behöver man inte lära sig denna formel separat – den är ju bara en variant av den första kvadreringsregeln!

Huvudprincipen vid **ekvationslösning** är att man i varje steg gör samma sak med båda leden: man kan addera samma tal till båda leden, dividera båda leden med samma tal osv. Observera att en andragradsekvation ofta kan lösas på enklare sätt än genom kvadratkomplettering eller lösningsformeln.

Om t.ex. $p = 0$ har man $x^2 + q = 0$, som löses direkt genom kvadratrotsutdragning.

Om $q = 0$ kan vänsterledet faktoriseras: $x(x + p) = 0$. Om en produkt av tal är lika med 0 måste något av talen vara 0. Alltså är $x = 0$ eller $x = -p$. Denna idé kan också användas i andra fall, om ekvationen kan skrivas som en produkt av faktorer som är lika med noll.

Regel (16) inser man också genom att använda denna idé. Denna regel är mycket användbar som ett snabbt sätt att kontrollera att man har löst en andragradsekvation rätt.

3.1 Lös ekvationen $(5x+8)(6-x) - (4-x)(5x+2) = 44$

3.2 Lös ekvationerna a) $\frac{x+5}{15} + \frac{x}{9} = 3$ b) $\frac{2x-3}{4} + \frac{5-x}{3} = 1$

c) $\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{x-5}{12}+\dfrac{x-1}{18}$ d) $\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x-4}{x-6}=2$

När man skall lösa ekvationen $16(13-x)=48$ är det enklast att först lösa ut $(13-x)$, inte att multiplicera in i parentesen.

3.3 Lös ekvationerna a) $16(13-x)=48$ b) $\dfrac{13\cdot 12}{45}(x-7)=\dfrac{52\cdot 72}{45}$

c) $\dfrac{5x}{x-4}-\dfrac{4}{x}=5$

3.4 Lös ekvationerna a) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x}{2}=1$ b) $\dfrac{5x}{6}-\dfrac{x+2}{9}=\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{4x+1}{5}-\dfrac{2x-1}{3}=2$ d) $\dfrac{1}{3x}-\dfrac{5}{6x}=\dfrac{1}{10}$

3.5 Lös ekvationerna a) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x+5}{x-2}=0$ b) $\dfrac{3}{4x-7}-\dfrac{4}{12x-21}=1$

3.6 Förenkla så långt som möjligt

a) $(x-4)(x-5)-3x(2x-3)$ b) $(1-5x)(1+15x)-3(2-5x)(2+5x)$

c) $(2x-3)^2-(2x-5)(2x+5)$ d) $(3x+4)^2-(3x-2)(3x-8)$

3.7 Faktorisera följande utryck så långt som möjligt: a) x^2-49 b) $3x^2-12$

c) $18x-2x^3$ d) $x^2-10x+25$

3.8 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a) $\dfrac{5x+15}{3x^2+9x}$ b) $\dfrac{x^2-9}{3x-9}$ c) $\dfrac{x^3-4x}{5x+10}$ d) $\dfrac{8x^2-72}{2x-6}$

3.9 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a) $1-\dfrac{b}{a+b}$ b) $2-\dfrac{2a+b}{a+b}$ c) $\dfrac{3}{2a}-\dfrac{1}{3a}-\dfrac{1}{a}$ d) $\dfrac{2}{a^2+a}-\dfrac{1-a}{a^2+a}$

3.10 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2-x}$ b) $\dfrac{x-6}{x-3}-\dfrac{x}{3-x}$ c) $\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1}{x}$ d) $\dfrac{1}{a^2-2a}-\dfrac{2}{a^2-4}$

3.11 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a) $\dfrac{9a^2-1}{3a+6}\cdot\dfrac{a+2}{3a+1}$ b) $\dfrac{1}{a^2-4}\Big/\dfrac{1}{2a-4}$ c) $\dfrac{(3a^2-12)(a^2-1)}{(a+1)(a+2)}$

d) $\dfrac{(a^2+4a+4)(2a-4)}{(a^2+4)(a^2-4)}$

Hur förenklar man bäst ett ”dubbelbråk”, dvs. ett bråk som i sin tur innehåller bråk i täljaren och/eller nämnaren? En bra idé är ofta att börja med att förlänga bråket med minsta gemensamma nämnaren (MGN) till ”småbråken”. Ett exempel:

$$x=\frac{\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}.$$

Här är MGN lika med ab. Förläng bråket med detta, dvs. multiplicera både täljare och nämnare med ab:

$$x = \frac{ab\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)}{ab\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)^2} = \frac{b-a}{b+a}.$$

3.12 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{2a+b}{a+b} - 1\right)$ b) $\dfrac{a - \frac{9}{a}}{1 + \frac{3}{a}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{3} - \frac{12}{a}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{a}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}}$

3.13 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt: a) $\dfrac{b}{a^2+ab} + \dfrac{1}{a+b}$

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x+3} - 2$ c) $\dfrac{2a+b}{a^2-ab} - \dfrac{2}{a-b}$ d) $\dfrac{b^2-2ab}{a^2-ab} + \dfrac{a}{a-b}$

3.14 Lös följande ekvationer: a) $x^2 + 14x + 45 = 0$ b) $x^2 - 11x - 26 = 0$

c) $2x^2 - x - 28 = 0$ d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$ e) $3x^2 - 10x + 8 = 0$

3.15 Faktorisera följande uttryck så långt som möjligt: a) $x^2 - 2x - 3$

b) $5x^2 + 25x + 20$ c) $2x^2 + 13x - 7$ d) $24 - 21x - 3x^2$

3.16 Lös följande ekvationer: a) $x(x+3) = 0$ b) $(x-3)(x+5) = 0$

c) $3x(2x-5) = 0$ d) $5(3x-2)(x+8) = 0$

3.17 Ekvationen $x^2 - 4x + a = 0$ har en rot $x = -3$. Bestäm a och den andra roten.

3.18 Lös följande ekvationer: a) $3x - (x+2)(x-2) = 0$ b) $(x+3)(x+4) = 42$

c) $\dfrac{x-1}{x+5} = \dfrac{3}{x-1}$ d) $\dfrac{x}{7-x} = \dfrac{3}{3x-1}$

I följande uppgift lönar det sig att bryta ut en faktor ur hela vänsterledet, i stället för att multiplicera ihop parenteserna.

3.19 Lös följande ekvationer: a) $x(x+3) + x(2x-9) = 0$

b) $(x+3)(x-1) + (x+3)(2x-9) = 0$ c) $x(x^2-2x) + x(2-x) = 0$

d) $(x+1)(x^2+4) + 5x(x+1) = 0$

3.20 Förenkla a) $(2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3) - \sqrt{5}(3 - \sqrt{5})$ b) $(\sqrt{3} + 2)^2 + (2\sqrt{3} - 1)^2$

3.21 En rektangel har omkretsen 48 cm. Låt en sida vara x cm. Ange arean uttryckt i x.

3.22 En rektangel har arean 15 cm^2. Låt en sida vara x cm. Ange omkretsen uttryckt i x.

3.23 En rät cirkulär cylinder har volymen 25 cm^3. Låt höjden vara h cm. Ange basradien uttryckt i h.

3.24 I en idrottsförening är medlemsavgiften 135 kr för vuxna och 60 kr för ungdomar. Ett visst år hade föreningen 426 medlemmar och totalt betalades 44 085 kr i medlemsavgifter. Hur många vuxna och hur många ungdomar var medlemmar i föreningen det året?

3.25 Den ena roten till ekvationen $x^2 - 202x + a = 0$ är $x_1 = 199$. Bestäm (utan att lösa ekvationen) den andra roten och värdet på a.

3.26 I en rätvinklig triangel är den ena kateten 73 cm längre än den andra. Omkretsen är 456 cm. Beräkna sidornas längder. (I denna uppgift gör vi ett undantag och tillåter miniräknare.)

4. Räta linjen

(17) Om A, B och C är tre tal och inte både A och B är noll, så betyder ekvationen $Ax + By + C = 0$ en rät linje.
(18) Om $B = 0$ (och alltså $A \neq 0$), kan ekvationen skrivas $x = a$, och betyder en **lodrät** linje som skär x-axeln i punkten $(a, 0)$.
(19) Om $B \neq 0$, kan man lösa ut y och får en ekvation av formen $y = kx + b$. Talet k är linjens **riktningskoefficient** eller **lutning**, och linjen skär y-axeln i punkten $(0, b)$.
(20) En rät linje genom punkten (x_1, y_1) med lutningen k har ekvationen $y - y_1 = k(x - x_1)$.
(21) Lutningen för linjen genom punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Två linjer med lutningarna k_1 och k_2 är

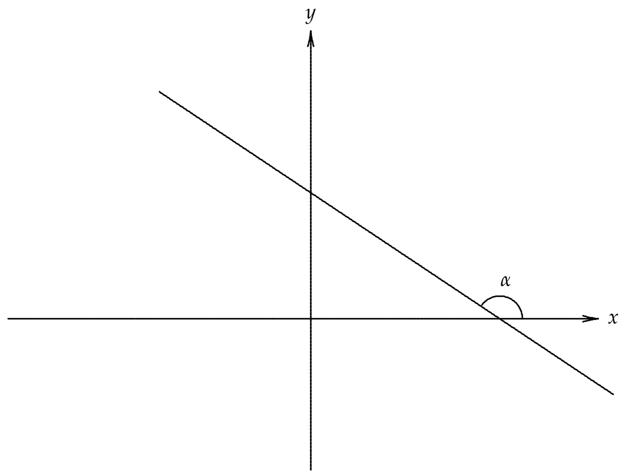
(22) $-$parallella om $k_1 = k_2$

(23) $-$vinkelräta om $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Kommentar: En ekvation av formen $Ax + By + C = 0$ är inte entydigt bestämd. Den kan multipliceras eller divideras med vilket som helst tal som inte är noll, och betyder ända samma linje. Dessutom skriver man ofta ekvationen på formen $Ax + By = -C$ i stället. Exempel:

$$2x - 5y = 8 \text{ betyder samma linje som } -4x + 10y + 16 = 0.$$

Lutningen k är tangens för lutningsvinkeln α, som är vinkeln mellan linjen och den *positiva* x-riktningen. Se figuren.



4.1 Bestäm riktningskoefficienten för den linje som går genom punkterna a) $(-2, 1)$ och $(3, 16)$ b) $(-3, -1)$ och $(1, 5)$ c) $(-3, 1)$ och $(-1, -5)$ d) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ och $(2, \frac{7}{3})$

4.2 Bestäm en ekvation för den linje som går genom a) $(-2, 5)$ och $(1, 2)$ b) $(-1, 3)$ och $(3, -5)$ c) $(1, 1)$ och $(1, 4)$

4.3 Bestäm riktningskoefficienten för följande linjer:
a) $5x - y + 2 = 0$ b) $2x + 5y + 1 = 0$ c) $\frac{2x}{3} + 3y - 4 = 0$ d) $3y - 4 = 0$

4.4 Bestäm en ekvation för den linje som går genom $(-4, 1)$ och är parallell med linjen $2x - 3y + 5 = 0$.

4.5 Bestäm konstanten a så att linjerna $2ax + 3y - 5 = 0$ och $(a + 1)x - y + 2 = 0$ blir parallella.

4.6 Bestäm konstanten a så att linjerna $ax + 6y - 7 = 0$ och $(a + 5)x - 4y + 1 = 0$ blir vinkelräta.

4.7 Rita följande linjer i ett kooordinatsystem: a) $2x + 6y = 9$ b) $3x - 6y = 10$

4.8 Linjerna $y = x - 14$ och $y = x/3$ bildar tillsammans med x-axeln en triangel. Bestäm arean av denna triangel.

4.9 Linjerna $9y - 5x + 24 = 0$ och $18y + 11x - 15 = 0$ bildar tillsammans med y-axeln en triangel. Bestäm arean av denna triangel.

4.10 Bestäm konstanten a så att linjen $y = (3a - 2)x + 5$ blir parallell med x-axeln.

4.11 Bestäm konstanten b så att linjen $y = (b + 2)x + b^2 - 5b$ går genom origo.

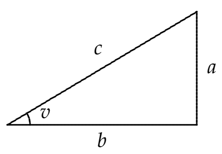
4.12 Genom den punkt där kurvan $y = \dfrac{5x - 2}{3x^2 + 1}$ skär y-axeln dras en linje med riktningskoefficienten 5. Bestäm en ekvation för denna linje.

4.13 På kurvan $y = 12x - x^3$ är A den punkt som har x-koordinaten -1 och B den punkt som har x-koordinaten 2. Linjen genom A och B dras. Bestäm en ekvation för denna linje.

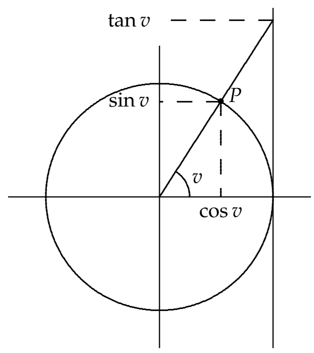
4.14 En linje går genom $(2a, 2)$ och (a^2, a). Bestäm riktningskoefficienten uttryckt i a. Uttrycket ska vara förenklat så långt som möjligt.

4.15 En linje går genom $(4, 4)$ och $(2b, b^2)$. Bestäm riktningskoefficienten uttryckt i b. Uttrycket ska vara förenklat så långt som möjligt.

5. Trigonometri



$$\sin v = \frac{a}{c} \qquad \cos v = \frac{b}{c} \qquad \tan v = \frac{a}{b}$$



För en spetsig vinkel v kan $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ uttryckas som ett förhållande mellan sidor i en rätvinklig triangel, där en vinkel är v. För godtyckliga vinklar definieras de trigonometriska värdena med hjälp av enhetscirkeln. Många trigonometriska samband ser man lätt med hjälp av denna figur.

(24) $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ (25) $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$

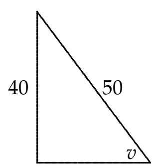
(26) $\cos(-v) = \cos v, \quad \sin(-v) = -\sin v, \quad \tan(-v) = -\tan v$

(27) $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ (28) $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$

(29) $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ (30) $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$

Genom att byta ut v mot $-v$ i formlerna (27) och (29) och använda (26) får man formler för $\sin(u - v)$ och $\cos(u + v)$. Genom att kombinera (24) och (30) kan man få alternativa formler för $\cos 2v$.

5.1 Bestäm $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ för vinkeln v i figuren:



5.2 För en viss spetsig vinkel u gäller att $\sin u = \frac{4}{7}$. Bestäm $\cos u$ och $\tan u$. (Rita en rätvinklig triangel där en vinkel är u).

5.3 Rita en liksidig triangel med sidan 2. Beräkna höjden och använd triangeln för att bestämma följande värden:

$\sin 60^\circ =$	$\cos 60^\circ =$	$\tan 60^\circ =$
$\sin 30^\circ =$	$\cos 30^\circ =$	$\tan 30^\circ =$

5.4 Använd enhetscirkeln för att bestämma

a) en vinkel mellan 90° och 360° som har samma sinusvärde som 70°,

b) en vinkel mellan 90° och 360° som har samma cosinusvärde som 70°,

c) en vinkel mellan 90° och 360° som har samma tangensvärde som 70°.

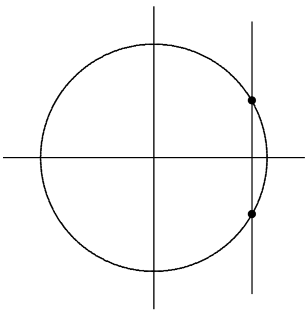
5.5 Använd enhetscirkeln för att bestämma följande värden:

a) $\cos 135^\circ$ b) $\sin 225^\circ$ c) $\tan 225^\circ$ d) $\sin 450^\circ$

e) $\cos 330^\circ$ f) $\sin 270^\circ$ g) $\sin(-30^\circ)$ h) $\tan 495^\circ$

Exempel. Lös ekvationen $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösning: Rita en enhetscirkel! Rita sedan den lodräta linjen som svarar mot att första koordinaten är $\sqrt{3}/2$:



Man ser att en lösning svarar mot läget $x = 30^\circ$, en annan mot läget -30°. *Alla* lösningar ges då av formeln

$$x = \pm 30^\circ + n \cdot 360^\circ,$$

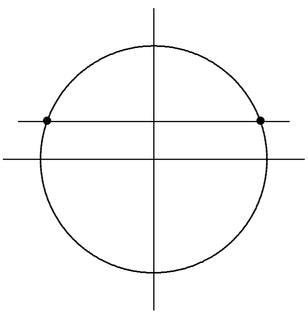
där n antar alla heltalsvärden.

Man kan också illustrera lösningen med grafen av cosinusfunktionen:

$x_0 - 360^\circ$ $-x_0$ x_0 $x_0 + 360^\circ$

Exempel. Lös ekvationen $\sin x = \frac{1}{3}$.

Lösning: Korsa enhetscirkeln med en vågrät linje som svarar mot att andra koordinaten är $\frac{1}{3}$:

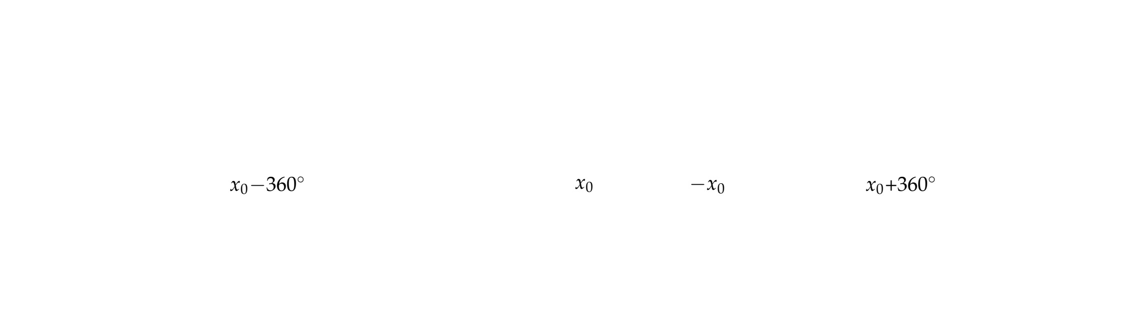


En lösning är en spetsig vinkel x_0 som (med räknarens hjälp) är approximativt 19.47°. Dessutom finns en lösning som är $180^\circ - x_0$. *Alla* lösningar ges då av formlerna

$$x = x_0 + n \cdot 360^\circ,$$
$$x = 180^\circ - x_0 + n \cdot 360^\circ,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

På grafen ser det i princip ut så här:



5.6 För vilka vinklar v, $0° \leqslant v \leqslant 360°$, gäller a) $\sin v = \frac{1}{2}$, b) $\cos v = \frac{1}{2}$, c) $\tan v = 1$, d) $\cos v = 2$, e) $\sin v = -\frac{1}{2}$, f) $\cos v = -1$, g) $\tan v = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

5.7 Antag att $0° \leqslant v \leqslant 90°$ och att $\sin v = a$. Uttryck med hjälp av a
a) $\sin(-v)$ b) $\sin(180° - v)$ c) $\sin(180° + v)$ d) $\sin(360° - v)$

5.8 För vilka vinklar v, $0° \leqslant v \leqslant 360°$, gäller att
a) $\sin v > \frac{1}{2}$, b) $\cos v < -\frac{1}{2}$, c) $0 < \sin v < \frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2} < \sin v < \frac{1}{2}$?

5.9 Ange en vinkel v, $0° < v < 180°$, sådan att
a) $\cos v = \cos 380°$ b) $\cos v = \cos 460°$ c) $\cos v = \cos 350°$ d) $\cos v = \cos 200°$

5.10 Ange två vinklar v, $0° < v < 360°$, sådana att
a) $\sin 400° = \sin v$ b) $\sin 3700° = \sin v$ c) $\sin(-50°) = \sin v$ d) $\sin 700° = \sin v$

5.11 a) Bestäm $\sin v$ då $\cos v = \dfrac{\sqrt{45}}{7}$ och $0° < v < 90°$

b) Bestäm $\cos v$ då $\sin v = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$ och $0° < v < 90°$

c) Bestäm $\cos v$ då $\sin v = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$ och $90° < v < 180°$

d) Bestäm $\sin v$ då $\cos v = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$ och $270° < v < 360°$

e) Bestäm $\tan v$ då $\cos v = -\frac{12}{13}$ och $0° < v < 180°$

5.12 Lös ekvationen a) $\sin 5x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\sin 5x = \frac{1}{2}$

5.13 Lös ekvationen a) $\cos 3x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5.14 Bestäm de vinklar v i intervallet $0° \leqslant v < 360°$ som är lösningar till ekvationen
a) $\cos 2x - 1 = 0$ b) $2\cos x - 1 = 0$

5.15 Lös ekvationen a) $\sin 3x = \sin 15°$ b) $\sin(x + 40°) = \sin 65°$

5.16 Lös ekvationen a) $\cos\dfrac{x}{2} = \cos 10°$ b) $\cos 3x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5.17 Bestäm de vinklar v i intervallet $0° \leqslant v < 360°$ som är lösningar till ekvationen $\cos(2x + 10°) = \cos 110°$.

5.18 Lös ekvationerna

a) $2 + \cos x = 3 - \cos x$ b) $\dfrac{4\sin x + 1}{\sin x + 1} = 2$ c) $2 + \cos x = 3 + \cos x$

5.19 Bestäm alla vinklar v för vilka

a) $\sin v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin(v - 10°) = \frac{1}{2}$ c) $\cos(v + 20°) = 0$

5.20 Lös följande ekvationer: a) $\sin 5x = \sin x$

b) $\sin 3x = \sin(x + 20°)$ c) $\cos 3x = \cos x$ d) $\cos(3x - 50°) = \cos 2x$

5.21 Lös följande ekvationer: a) $\sin x \cos 3x = 2\sin x$ b) $2\sin x \cos 3x = \sin x$

5.22 Lös ekvationen $\sqrt{2}\sin x \cos x = \cos x$.

5.23 Lös ekvationen $\cos^2 x - \cos x = 2$. (*Ledning*: sätt $\cos x = t$)

5.24 Lös ekvationen $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

5.25 a) Visa hur formlerna (28) och (30) på sid. 13 kan härledas från formlerna (27) och (29) (ev. med hjälp av någon ytterligare formel).

b) Visa hur $\cos 2v$ kan uttryckas enbart med hjälp av $\sin v$ resp. enbart med hjälp av $\cos v$.

5.26 För vinkeln v, $0° \leqslant v \leqslant 90°$, gäller att $\sin v = \frac{4}{5}$. Beräkna a) $\cos v$, b) $\sin 2v$, c) $\cos 2v$.

5.27 Antag att $0° \leqslant v \leqslant 90°$ och $\cos v = b$. Uttryck med hjälp av b

a) $\sin^2 v$ b) $\sin v$ c) $\sin 2v$ d) $\cos 2v$ e) $\sin(v + 30°)$ f) $\cos(v - 45°)$

5.28 För vinkeln v, $90° \leqslant v \leqslant 180°$, gäller att $\sin v = \frac{3}{4}$. Beräkna

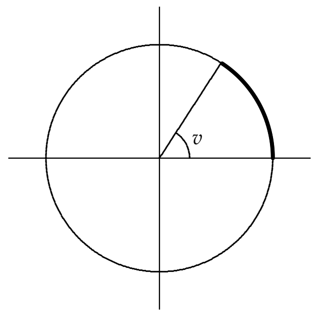
a) $\cos v$ b) $\sin 2v$ c) $\sin(v - 30°)$

5.29 Lös ekvationen $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.

I trigonometriska uppgifter där det gäller att bestämma vinklar och sidor i trianglar och att lösa trigonometriska ekvationer går det bra att mäta vinklar i grader, som i ovanstående uppgifter. Men när man vill *derivera* trigonometriska funktioner visar det sig att deriveringsreglerna blir krångliga om man mäter vinkeln i grader. I sådana sammanhang använder man därför ett annat vinkelmått, nämligen **radianer**. Storleken av en vinkel anges genom att man mäter hur lång **cirkelbåge** i enhetscirkeln, som vinkeln upptar.

En vinkel på 45° upptar en båge vars längd är $\frac{45}{360}$ av hela cirkelns omkrets, dvs. vinkelns mått i radianer är

$$\tfrac{45}{360} \cdot 2\pi = \frac{90\pi}{360} = \frac{\pi}{4}\,.$$



Vinkeln 180° motsvarar ett halvt varv, dvs. dess mått i radianer är π.
Vinkeln 360°, ett helt varv, motsvarar 2π radianer.
Vinkeln v° motsvarar i radianer $\dfrac{v}{360}\cdot 2\pi = v\cdot\dfrac{\pi}{180}$.

5.30 Uttryck följande gradtal i radianer: a) 30° b) 90° c) 135° d) 270°

5.31 Uttryck följande radiantal i grader: a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{7\pi}{4}$ d) 3π

5.32 Bestäm med hjälp av enhetscirkeln följande värden: a) $\cos\pi$ b) $\sin\dfrac{\pi}{6}$
c) $\cos\dfrac{3\pi}{4}$ d) $\tan\dfrac{3\pi}{4}$ e) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ f) $\sin\dfrac{7\pi}{6}$ g) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ h) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi\right)$

5.33 Bestäm x i intervallet $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ så att
a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\tan x = 1$ c) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin x = -1$

5.34 Lös följande ekvationer (x i radianer): a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\cos 3x = \frac{1}{2}$
c) $5\sin x = 2{,}5$ d) $\sin 5x = 0{,}5$

5.35 Lös följande ekvationer (x i radianer): a) $\sin x\cos x - 2\sin x = 0$
b) $2\sin x\cos x - \cos x = 0$ c) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$ d) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

6. Logaritmer

För logaritmer i basen 10 gäller att

$$x = 10^y \text{ är samma sak som } y = \lg x.$$

Speciellt är $\lg 1 = 0$ och $\lg 10 = 1$. Räkneregler:

(31) $\lg xy = \lg x + \lg y$ (32) $\lg \dfrac{x}{y} = \lg x - \lg y$ (33) $\lg x^y = y \lg x$

Man arbetar också med logaritmer i andra baser. Låt $a > 0$. Då säger vi att y är a-logaritmen för x om $x = a^y$. I formelform:

$$x = a^y \text{ är samma sak som } y = \log_a x.$$

Speciellt är $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^3 = 3$. För dessa logaritmer gäller också

(31′) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (32′) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (33′) $\log_a x^y = y \log_a x$

Räknereglerna för logaritmer är inget annan än vanliga potenslagar som blivit ”översatta” till ett annat skrivsätt. Vi kan t.ex. **bevisa** regeln (31) så här:

Sätt $u = \lg x$ och $v = \lg y$. Det betyder att $x = 10^u$, $y = 10^v$. I så fall är

$$xy = x \cdot y = 10^u \cdot 10^v = 10^{u+v}.$$

Men $xy = 10^{u+v}$ är ju samma sak som $u + v = \lg(xy)$, och sätter vi in vad u och v var för något, så står här formeln (31)!

Observera att reglerna (31)–(33) är **de enda räkneregler som finns för 10-logaritmer! Det finns t.ex. ingen regel alls för** $\lg(a + b)$**.**

Endast i mycket speciella fall kan man bestämma värdet av logaritmer utan hjälpmedel som räknare eller tabeller (och då får man mestadels bara närmevärden). Men det viktiga med logaritmer är att de är funktioner som lyder de tre lagarna. **Det är logaritmlagarna som motiverar att man överhuvud taget arbetar med logaritmer!**

Några exempel: Eftersom $2^3 = 8$, så gäller $\log_2 8 = 3$.

$\log_3 81 = 4$, eftersom $3^4 = 81$.

$\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$, eftersom $\dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{5^2} = 5^{-2}$.

I mer avancerade sammanhang används oftast talet e ($\approx 2{,}718281828$) som bas. Man talar då om *naturliga* logaritmer och skriver $\ln x = \log_e x$. (Det ”naturliga” är att derivatan av denna funktion är enklare än derivatan av alla andra logarimtfunktioner.)

Vi påminner: alla de övningar som följer här ska lösas **utan** räknare eller tabeller!

6.1 Bestäm följande logaritmvärden: a) $\lg 100$ b) $\lg 10\,000$
c) $\lg 0{,}01$ d) $\lg 0{,}00001$ e) $\lg \sqrt{10}$

6.2 Bestäm talet a då a) $\lg a = 3$ b) $\lg a = -4$ c) $\lg a = -1$ d) $\lg a = 0$

6.3 I vilket intervall ligger talet t om
a) $2 < \lg t < 3$ b) $0 < \lg t < 1$ c) $-1 < \lg t < 0$ d) $8 < \lg t < 10$

6.4 Beräkna med hjälp av logaritmlagarna
a) $\lg 2 + \lg 5$ b) $\lg 20 - \lg 2$ c) $2 \lg 5 + \lg 4$ d) $\lg 0{,}5 + \lg 0{,}02$

6.5 Lös följande ekvationer: a) $\lg x = \lg 3 + \lg 5$
b) $\lg 2x = \lg 24 - \lg 3$ c) $\lg x = 3 \lg 2 + \lg 3$ d) $\lg 12x - \lg(x + 1) = 1$

6.6 Antag att $\lg t = a$. Skriv, uttryckt i a: a) $\lg t^5$ b) $\lg \dfrac{1}{t}$ c) $\lg 100t$ d) $\lg 0{,}1t$

6.7 Beräkna a) $10^{2 \lg 3}$ b) $10^{-\lg 5}$ c) $10^{\lg 3 + \lg 5}$ d) $10^{\lg 3 - \lg 18}$

6.8 Beräkna a) $\lg 10 - \lg 1000$ b) $\lg 100 \cdot \lg 1000$ c) $\lg 100 + \lg 1000$
d) $\lg 400 - 2 \lg 2$ e) $\lg 7 - \lg 70$ f) $\lg 300 - \lg 3$

6.9 Skriv som en enda logaritm a) $\lg 15 - \lg 5$ b) $\lg 3 + \lg 15$
c) $\lg 8 - 2 \lg 2$ d) $\lg 40 - 3 \lg 2$ e) $2 \lg 5 + \lg 3$ f) $\lg 2^5 - \lg 2^3$

6.10 Beräkna a) $10^{\lg 12}$ b) $10^{2 \lg 3}$ c) $10^{\lg 30} + 10^{\lg 50}$
d) $10^{\lg 30} \cdot 10^{\lg 50}$ e) $10^{\lg 40} - 10^{\lg 30}$ f) $100^{\lg 7}$

6.11 Lös följande ekvationer: a) $\lg x = \lg 12 - \lg 4$
b) $\lg(x + 2) = \lg 3 + \lg 4$ c) $\lg \dfrac{x}{5} = \lg 2 + \lg 3$ d) $\lg(3x - 1) = \lg 15 - \lg 3$

6.12 Skriv som en enda logaritm: a) $\lg 3x + \lg 2x$ b) $\lg 3x - \lg 2x$
c) $\lg(x-3)+\lg(x+3)$ d) $\lg(x-3)-\lg(x+3)$ e) $\lg \dfrac{5}{x^2} + 2 \lg x$ f) $2 \lg 3x - \lg x$

6.13 Förenkla a) $\lg 25 - \lg 5$ b) $\dfrac{\lg 25}{\lg 5}$

6.14 Beräkna a) $\log_3 9$ b) $\log_2 32$ c) $\log_2 \dfrac{1}{4}$
d) $\log_5 \dfrac{1}{5}$ e) $\log_3 1$ f) $\log_2 4^5$

6.15 Beräkna $\log_{1/2} 4$. (Den här är lite extra knepig!)

7. Funktioner

Låt A och B vara två mängder. En **funktion f från A till B** är en regel som på ett entydigt sätt till varje element x i A ordnar ett element $f(x)$ i B. Mängden A kallas funktionens **definitionsmängd**. Mängden av alla värden som $f(x)$ kan anta kallas funktionens **värdemängd.**

De flesta funktioner du har träffat på i dina matematikstudier har varit av typen $y = f(x)$, där definitions- och värdemängderna har bestått av *tal*. Många sådana funktioner kan beskrivas med en *formel* som t.ex. $f(x) = x^2+2x$, men det finns också andra sätt att beskriva en funktion.

Exempel 1. Låt A och B bestå av alla reella tal och definiera regeln f genom att säga att

$$f(x) \text{ är det största heltalet som är mindre än eller lika med } x.$$

Exempelvis är $f(3{,}7) = 3$, $f(5) = 5$, $f(-4) = -4$, $f(-4{,}3) = -5$. Eftersom regeln på ett entydigt sätt beskriver vad $f(x)$ ska vara för ett godtyckligt reellt tal x, är detta verkligen en funktion. Definitionsmängden består av alla reella tal, och värdemängden består av alla heltal.

Exempel 2. Låt A vara mängden av alla svenska medborgare, och B mängden av alla 10-siffriga heltal. Om x är en svensk medborgare, låter vi $p(x)$ betyda hans eller hennes personnummer. Då är p en funktion från A till B. Värdemängden är här en äkta delmängd av B.

7.1 Funktionen f är definierad av formeln $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$. Beräkna a) $f(5)$

b) $f(-3)$ c) $f(\frac{1}{9})$ d) För vilket eller vilka x gäller att $f(x) = 4$?

e) För vilket eller vilka x saknar funktionen värde?

7.2 Bestäm definitionsmängderna för följande funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ c) $h(x) = \sqrt{x-4}$

7.3 Bestäm värdemängden till den funktion f som är definierad genom

a) $f(x) = x^2+1$ b) $f(x) = 5 - x^4$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

7.4 Bestäm värdemängden till den funktion f som är definierad genom

a) $f(x) = 3 + 2\sin x$ b) $f(x) = 2 + \cos^2 x$ c) $f(x) = \dfrac{4}{3+\sin x}$

d) $f(x) = \sin^2 x + 3\cos^2 x$

7.5 Beräkna $f(2) - f(\frac{1}{2})$, då $f(x) = \dfrac{10}{2x+1}$.

7.6 Låt $f(x) = -x^3 - 2x^2$. Beräkna a) $f(3)$, b) $f(-5)$.
c) För vilket eller vilka x gäller att $f(x) = 0$?
d) Förenkla uttrycket $f(2x) - f(x)$.

7.7 Låt $f(x) = 3x^2 - 4x$. Beräkna a) $f(-2)$, b) $f(\frac{5}{6})$, c) $f(f(2))$.
d) För vilket eller vilka x gäller att $f(x) = 55$?
e) Förenkla $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$. (I vilket sammanhang förekommer detta?)
f) Förenkla $\dfrac{f(3a) - f(a)}{8a}$.

7.8 Funktionen h är definierad genom $h(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Beräkna
a) $h(2) - h(1)$, b) $h(3) - h(-2)$ c) $h(1) - h(\frac{1}{2})$.

7.9 Funktionen g är definierad genom $g(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^3 - \frac{5}{2}x^2 + x$.
Beräkna a) $g(3) - g(1)$, b) $g(0) - g(-2)$.

7.10 $f(x) = \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{3}{x^2}$. Beräkna a) $f(3) - f(2)$, b) $f(-2) - f(-5)$.

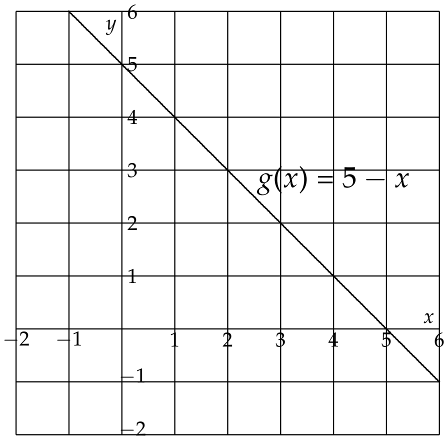
7.11 Förenkla uttrycket $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, då a) $f(x) = \dfrac{1}{3x + 1}$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. c) Vilket matematiskt begrepp hör detta ihop med?

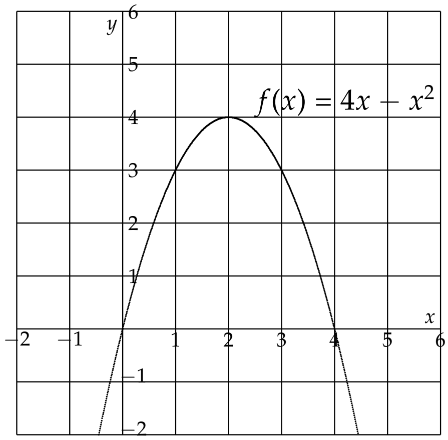
7.12 En kula rör sig så att sambandet mellan tiden t (sekunder) och tillryggalagd sträcka $s(t)$ (meter) beskrivs av $s(t) = 25t + \frac{1}{2}t^2$.
a) Hur långt flyttar sig kulan under tidsintervallet från $t = 2$ till $t = 10$?
b) Vilken medelhastighet har kulan under tidsintervallet från $t = 4$ till $t = 6$?
c) Teckna ett uttryck för medelhastigheten under tidsintervallet från $t = t_1$ till $t = t_2$.

7.13 Vid produktion av en vara är kostnaden att tillverka q enheter $T(q)$ tusen kronor, där $T(q) = 5000 + 200q + q^2$.
a) Hur stor är kostnadsökningen när man ökar produktionen från 50 till 60 enheter?
b) Hur stor är den genomsnittliga kostnadsökningen per enhet när man ökar produktionen från 50 till 60 enheter?
c) Teckna ett uttryck för den genomsnittliga kostnadsökningen per enhet när man ökar produktionen från q_1 till q_2 enheter?

7.14 Graferna till funktionerna f och g är givna i figuren. Bestäm

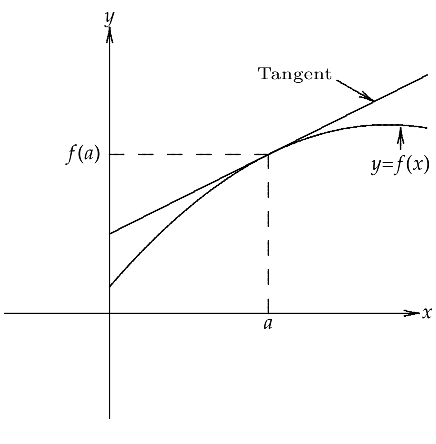
a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(g(3))$ d) $g(f(3))$

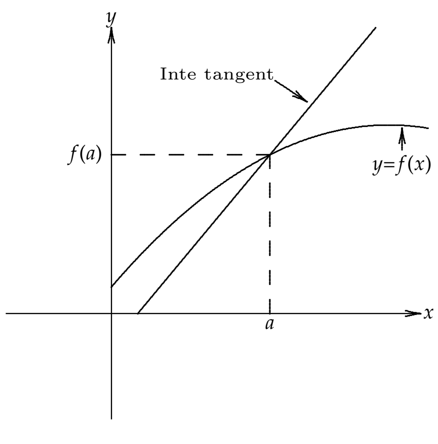




8. Derivata

För derivering gäller följande regler:
(34) $\left(f + g\right)' = f' + g'$ (35) $\left(c \cdot f\right)' = c \cdot f'$ om c är en konstant
(36) Om $f(x) = x^p$ så är $f'(x) = px^{p-1}$
Tangenten till grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ är den *linje* som bäst approximerar grafen alldeles i närheten av punkten. Tangentens riktningskoefficient är $f'(a)$.





Exempel: Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = 3x - 2x^2$ i den punkt som har x-koordinaten -1.

Lösning: Tangeringspunktens y-koordinat bestäms: $x = -1$ ger $y = 3(-1) - 2(-1)^2 = -3 - 2 = -5$.

Derivatan är $y' = 3 - 4x$. Tangentens riktningskoefficient fås för $x = -1$: $y' = 3 - 4(-1) = 3 + 4 = 7$.

Tangentens ekvation enligt enpunktsformen: $y - (-5) = 7(x - (-1))$, dvs. $y + 5 = 7x + 7$ eller $y = 7x + 2$.

8.1 Bestäm $f'(-2)$ då a) $f(x) = 5x^2 - x$ b) $f(x) = 5 - x^2 - x^3$

8.2 En kurva har ekvationen $y = \dfrac{3x - 2x^3}{3}$. Bestäm riktningskoefficienten till tangenten i den punkt som har x-koordinaten 3.

8.3 Bestäm $f'(4)$ då a) $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{x}{4}$ b) $f(x) = 8\sqrt{x} + x$

8.4 Lös ekvationen $f'(x) = 0$ då a) $f(x) = 3x^2 - 3x$ b) $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$

8.5 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \dfrac{3x^2 - 6x}{2}$ i den punkt som har x-koordinaten 2.

8.6 I vilken eller vilka punkter är tangenten till kurvan $y = 2x^3 - 15x^2 + 28x$ parallell med linjen $y = 4x - 3$?

8.7 Lös ekvationen $f'(x) = 1$ då $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{6}$.

8.8 Sambandet mellan sträckan $s(t)$ meter och tiden t sekunder för ett föremål som rör sig beskrivs av $s(t) = 15t + 0{,}02\,t^2$.

a) Bestäm hastigheten efter 50 sekunder.

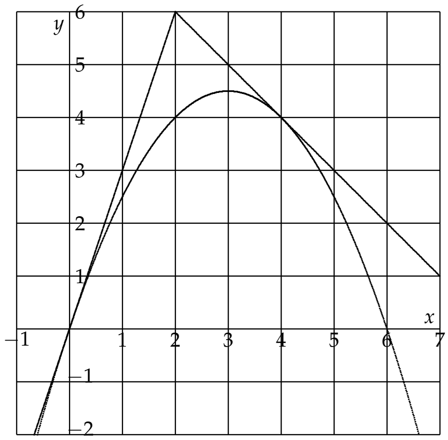
b) När är hastigheten 20 m/s?

8.9 I vilken eller vilka punkter har kurvan $y = x^3 + 3x^2 - 1$ en tangent som är parallell med x-axeln?

8.10 För vilka x är $f'(x) > 0$ då $f(x) = 3x^2 - 20x + 5$?

8.11 Figuren visar kurvan $y = f(x)$ och två tangenter till denna. Bestäm

a) $f'(0)$ b) $f'(4)$



9. Integral

Här har ni några övningar på primitiva funktioner och integraler. Dessa saker kommer att behandlas ingående i de ordinarie kurserna i utbildningen. Några stolpar:

- F är en primitiv funktion till f, om $F'(x) = f(x)$ för alla x.
- Om $a \neq -1$ och $f(x) = x^a$, så har f de primitiva funktionerna $F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, där C är en godtycklig konstant.
- Om F är primitiv funktion till f och G är primitiv funktion till g, så är $F + G$ primitiv funktion till $f + g$.
- Om c är en konstant, så är dessutom cF primitiv funktion till cf.
- En *integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ kan beräknas med hjälp av primitiv funktion:

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

  (Att detta gäller är inte något självklart. Det kommer att bevisas i en av kurserna.)
- Om $f(x) \geqslant 0$, kan integralen $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ tolkas som arean av det område i xy-planet som avgränsas av x-axeln, linjerna $x = a$ och $x = b$ samt kurvan $y = f(x)$.
- Om $f(x) > g(x)$, beräknas arean av det område som begränsas av linjerna $x = a$ och $x = b$ samt kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ med integralen $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$.

Exempel: Om $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, så har f den primitiva funktionen
$F(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x + C = \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 - x + C$, där C kan vara vilket tal som helst.

9.1 Bestäm alla primitiva funktioner till $2x^5 - 6x^2 + 1$.

9.2 Funktionen f är definierad genom $f(x) = -4x - 3$. Bestäm den primitiva funktion F till f för vilken $F(-3) = 1$.

9.3 Bestäm $f(x)$ då $f'(x) = 6x^2 - 10x + 1$ och $f(2) = 5$.

9.4 Bestäm alla primitiva funktioner till a) $45x^2 - 30x$ b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{x^2 + x}{3}$

9.5 Beräkna a) $\displaystyle\int_0^2 (10x - 9x^2)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 - x)\,dx$

9.6 Beräkna arean av det område som begränsas av $y = 2x^2 + x$, $x = 1$, $x = 2$ samt x-axeln.

9.7 Beräkna a) $\int_{-2}^{3} (6x^2 - 10x - 1)\,dx$ b) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$

9.8 Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av $y = x^2$, $y = 6 - x$ och x-axeln.

9.9 Kurvan $y = 4x - x^2$ och linjen $y = 4 - x$ begränsar ett område. Bestäm dess area.

9.10 Kurvan $y = \dfrac{4}{x^2}$ och linjerna $y = 4x$ och $x = 4$ begränsar tillsammans med x-axeln ett område. Bestäm dess area.