

Tillämpningar i mekanik

Kursen "Linjär algebra och geometri I" är utformad som den andra delen av ett block på tre grundläggande kurser i matematik, nämligen *Baskurs i Matematik*, *Linjär algebra och geometri I* samt *Linjär algebra II*. Denna uppdelning av kurserna har utvecklats gradvis under Bologna-processen.

Kursen är väl genomtänkt i sin nuvarande form och det går lätt att utan att förändra innehållet öka kopplingen till mekanikkursen, genom att på ett naturligt sätt belysa kursens relevans och tillämpbarhet inom mekaniken. I själva verket kan många av de exempel som redan används i kursen enkelt omformuleras så att de beskriver ett mekaniskt problem (till skillnad från ett rent matematiskt problem). Man kan välja dessa exempel från mekaniken så att de går att förstå utan mer än gymnasiala kunskaper i ämnet.¹

Vi har övervägt möjligheten att ägna ett antal föreläsningar enbart åt mekaniska exempel, men vår uppfattning är att det bästa vore att istället kontinuerligt under hela kursens gång koppla innehållet till mekanik.

Se nedan för ett antal idéer om hur exempel från mekaniken kan läggas in i kursen i dess nuvarande form:

- **Del 1: Linjära ekvationssystem och matriser**
- **Del 2: Determinanter**
- **Del 3: Vektorer i planet och i rummet**
- **Del 4: Euklidiska vektorrum**

Exemplerna är tagit från olika läroböcker; se referenslistan.

Tillämpningar inom del 1 (Linjära ekvationssystem och matriser) och del 2 (Determinanter)

1. Kraftkalkyl och Linjära ekvationssystem

(a) System av krafter i jämvikt med hjälp av **Linjära ekvationssystem** - se t.ex. Hefferon [JH, s. 1,2, 5], och Linköping Övningsbok i Linjär Algebra [DEG, uppg. A 831].

(b) Hållfasthetsundersökningar med tillämpningar av **Matriskalkyl**. Se t.ex. Linköping Övn.boken i Linjär Algebra [DEG, s.44, Laboration 9A].

¹Detta är viktigt eftersom studenter på Teknisk Fysik läser linjär algebra kursen innan de läser kursen Mekanik I.

2. Beräkningar av accelerationer av system av masspunkter hängande i taljor (Linjära ekvationssystem)

Chen, [Ch, Exempel 1.11.1, s.24, Kapitel 1 och Problem 20 och 21, s.30-31, Kapitel 1].

3. Svängningssystem och Linjära avbildningar (Egenvärden och egenvektorer)

Hackman, [PH, Bok 1, Exempel B.V.12, sida 92].

4. Digitala filter och Matrisräkning

Hackman, [PH, Bok 1, Exempel B.V.12, sida 92].

Hackman, [PH, Bok 1, Avsnitt B.V.11, sidor 90-92] och [PH, Bok 2, Avsnitt C.V.1, sida 88].

Tillämpningar inom del 3 (Vektorer i planet och i rummet)

5. Kraftkalkyl och Geometri

(a) Framställning av krafter med vektorer och kraftberäkningar (Geometri: vektoroperationer): t.ex. Chen [Ch, Kapitel 4, sida 1] och uppgifter 9, 10, 11, 12 på sida 552 i Adams

- ro i en flod,
- flygplan flygande i en vind,
- bilfärd i vinden (med en flöjel).
- Linköping Övningsbok i Algebra, [DEG, uppg. C 506].

(b) Uppdelning av en kraft i komponenter parallella med givna riktningar:
I planet: uppdelning av en kraft i komponenter i två givna riktningar.
I rummet: uppdelning av en kraft i komponenter i två givna riktningar (villkoret: kraften ligger i planet som spänns upp av riktningarna).
I rummet: uppdelning av en kraft i komponenter i tre givna riktningar.
Motsvarande moment i kursen: baser och koordinater i planet, och rummet, skalärprodukt. se t.ex. Nyberg [N, Avsnitt 2.2.2], och Chen [Ch, Kapitel 4, sidorna 19-22].

(c) Tillämpningar av vektorprodukt (Geometri) - se t.ex. Hackman [PH, Bok 1, Avsnitt A.IV, sidorna 25-26], sidan 558 i Adams [A].

(i) Den linjära hastighetsvektorn \mathbf{v} vid en rotation med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\Omega}$ i punkten \mathbf{r} kring origo ges av

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

(ii) Rörelsemängdsmoment (kring origo)

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

(iii) Kraften av ett magnetiskt fält \mathbf{B} på en partikel med elektrisk laddning q och hastigheten \mathbf{v} är

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

(iv) Vridmoment \mathbf{T} kring punkten \mathbf{r}_0

$$\mathbf{T} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}.$$

(Adams [A, Exempel 5, s.559], Nyberg [N, Exempel 2.7-2.28, s. 26])

(v) Tredimensionella jämviktsproblem, t.ex. Nyberg [N, Exempel 3.12, s. 72].

6. Stela kroppens mekanik och Geometri

Tröghetsmoment m.a.p. en linje

Beräkna avståndet från en punkt till en linje (två lösningar).

7. Dynamik och Geometri

Vid en rörelse med konstant fart $\|\mathbf{v}(t)\|$ är accelerationen $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ vinkelrät mot $\mathbf{v}(t)$. Se t.ex. Hackman [PH, Bok 1, Avsnitt A. VII, s. 54].

8. Arbetet av en kraft \mathbf{F} under en linjär rörelse (Geometri)

$$\text{Arbete} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}$$

9. Bestämning av formen av hängande kablar och kedjor (Geometri)

Se Exempel på s.547-549 och uppgift 34, s.553 i Adams [A].

Tillämpningar inom del 4 (Euklidiska vektorrum)

10. Punkterna 5 (a), 5 (b) och 8 föres över till dimension n

I \mathbb{R}^n : uppdelning av en kraft i komponenter i $k \leq n$ givna riktningar (villkoret: kraften ligger i det linjära höljet av riktningarna).

Andra relevanta tillämpningar inom del 1-4

11. Optik och Geometri

Speglning av ljusstrålar i plana och sfäriska speglar

12. Beräkningar av strömmar i elektriska kretsar (Linjära ekvationssystem)

Anton-Rorres, [AR, Avnitt 11.2, s. 538-541]

Chen, [Ch, Exempel 1.8.1, 1.8.2, Kapitel 1, s. 18-21].

References

- [A] R. A. Adams, *Calculus*, 6th edition, Pearson Addison Wesley, Toronto, 2006.
- [AR] H. Anton, C. Rorres, *Elementary linear algebra: applications version*, 9nd edition, Hoboken, Wiley, 2005. ISBN: 0-471-44902-4, Libris: 9741267.
- [Ch] W. W. L. Chen, *Linear Algebra*, Imperial College, 1982, 2006. (Available free to all individuals).
- [DEG] J.-O. Drangert, B.-O. Eriksson, S. Gustavsson, *Övningsbok i Linjär Algebra*, Linköping: MATEMA, Univ. i Linköping, 1978.
- [JH] J. Hefferon, *Linear algebra*, 2006 (Available free to all individuals, URL <http://joshua.smcvt.edu>).
- [PH] P. Hackmans två böcker om linjär algebra (Krypa-gå, Boken med kossan på), senaste upplagan, Universitetet i Linköping. (Available free to all individuals, URL <http://www.mai.liu.se/~pehac/>).
- [N] C. Nyberg, *Mekanik: grundkurs*, Liber, Stockholm, 2003.

Linjär algebra och Geometri I, 5 hp

Nivå: A

Förkunskapskrav: Baskurs i Matematik

Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna lösa linjära ekvationssystem med Gausselimination och kunna redogöra för hur lösningen beror av koefficient- och totalmatrisernas rang;
- kunna räkna med matriser, beräkna matrisinverser och determinanter;
- kunna redogöra för vektorbegreppet, känna till och kunna använda räknelagarna för vektorer, kunna avgöra om vektorer är linjärt oberoende, känna till begreppen bas och koordinat;
- kunna redogöra för begreppen skalärprodukt och vektorprodukt samt kunna beräkna sådana produkter och tolka dem geometriskt;
- känna till linjens och planets ekvationer och kunna använda dessa för att beräkna skärningar och avstånd;
- veta vad som menas med rotationer, speglingar och ortogonala projektioner i planet och i rummet samt kunna beräkna sådana avbildningars matriser;
- kunna tolka en $m \times n$ matris som en linjär avbildning från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m ;

- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa matematiska problem.

Innehåll

Linjära ekvationssystem: Gausselimination, rang, lösbarhet. Matriser: matrisräkning och matrisinvers. Determinanter. Vektorräkning, linjärt beroende och oberoende, baser, koordinater, skalärprodukt och vektorprodukt, räta linjens ekvation, planets ekvation, avstånd, area och volym. Beskrivning av rotation, spegling och ortogonal projektion i \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^3 . Det linjära rummet \mathbb{R}^n och tolkning av en $m \times n$ -matris som en linjär avbildning från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m . Standardskalärprodukten på \mathbb{R}^n och Cauchy-Schwarz olikhet.

Undervisning

Föreläsningar, lektioner och räkneövningar.

Kurslitteratur

Anton, H., Rorres, C.: *Elementary linear algebra: applications version*, 9nd edition, Hoboken, Wiley, 2005. ISBN: 0-471-44902-4, Libris: 9741267.